Adı Soyadı:
Numarası:

27.11.2023

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I ARA SINAV SORULARI

1. c_1, c_2, c_3 birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere $c_1 y^2 = c_2(x + c_3)$ eğri ailesini genel çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

2. $y' - \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y' - x\sqrt{y} = 0$ denkleminin $y(2) = 4$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

4. $(2y - x^2)dx - xdy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5. $(e^{2y} + P(x,y))dx + (2xe^{2y} + x^3)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem ise $P(x,y)$ fonksiyonunu bulunuz.

Süre 90 dakikadır. Başarılar...

Doç. Dr. Fatma Hıra

Cevap Anahtarı

① $c_1 y^2 = c_2(x + c_3) \to y^2 = \underbrace{\frac{c_2}{c_1}}_{a} x + \underbrace{\frac{c_2 c_3}{c_1}}_{b} \Rightarrow y^2 = ax + b$ aslında 2 keyfi sabit vardır.

1. türev → $2c_1 y y' = c_2$

2. türev → $2c_1(y' \cdot y' + y y'') = 0 \Rightarrow y'^2 + yy'' = 0$ istenen dif denk

$c_1 \neq 0$ olmalı

② $y' = \underbrace{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}}_{f(x,y)}$ $\quad f(xt, yt) = \frac{x^2t^2}{y^2t^2} + \frac{yt}{xt} = f(x,t)$ olduğdan denklem sıfırıncı dereceden homojendir.

$y = ux$ dönüşümü yapılırsa $y' = u'x + u$ olup

$u'x + u = \frac{x^2}{u^2x^2} + \frac{ux}{x} \Rightarrow u'x + \cancel{u} = \frac{1}{u^2} + \cancel{u} \Rightarrow u'x = \frac{1}{u^2}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1}{u^2} \Rightarrow \int u^2 du = \int \frac{dx}{x}$ DA dır.

$\frac{u^3}{3} = \ln x + c \Rightarrow \frac{y^3}{3x^3} = \ln x + c$ genel çözüm

③ $y' - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x dx$ değişkenlerine ayrılabilen dif.

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$ genel çözüm

$y(2) = 4$ için $2 \cdot \sqrt{4} = \frac{2^2}{2} + c \Rightarrow 4 = 2 + c \Rightarrow c = 2$

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 2$ istenen özel çözüm

(4) $(2y - x^2)\,dx - x\,dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{x} \Rightarrow y' \underbrace{- \frac{2}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{-x}_{Q(x)}$ lineer dif denk

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ol. i.ç. genel çözüm

$\lambda(x).y = \int \lambda(x) Q(x) dx + c \Rightarrow y.\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}(-x)\,dx + c$

$\frac{y}{x^2} = -\ln x + c$ bulunur.

veya

$M(x,y) = 2y - x^2$, $M_y = 2$) $\neq$ TD değil

$N(x,y) = -x$, $N_x = -1$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2-(-1)}{-x} = -\frac{3}{x} \rightarrow \lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3}$

integral çarpanı dır. Buna göre

$\left(\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x}\right) dx - \frac{1}{x^2} dy = 0$ tam dif denk olur.

$\underbrace{\frac{2y}{x^3} dx - \frac{1}{x} dx - \frac{1}{x^2} dy}_{} = 0 \Rightarrow \int -d\left(\frac{y}{x^2}\right) - \int \frac{1}{x} dx = \int 0$

$-\frac{y}{x^2} - \ln x = c$

bulunur.

(5) $(\underbrace{e^{2y} + P(x,y)}_{M(x,y)})\,dx + (\underbrace{2xe^{2y} + x^3}_{N(x,y)})\,dy = 0$ tam dif denk ise

$M_y = N_x$ dır. Yani $2e^{2y} + P_y = 2e^{2y} + 3x^2$ dır.

$P_y = 3x^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$

$\int \partial P = \int 3x^2 \partial y$

$P(x,y) = 3x^2 y + h(x)$

olarak bulunur.